su P è banale. Sia ora U un qualsiasi L-sottomodulo *irriducibile* di V. Per ogni $y \in P$, $[L,y] = \underline{0}$, ovvero y commuta con tutti gli elementi di L; pertanto per il Lemma di Schur $y_{|U}$ è uno scalare. Ma poichè $y \in S_U$, $Tr(y_{|U}) = 0$, e ciò implica $y_{|U} = 0_U$. D'altra parte, sempre per il Teorema di Weyl, V è somma diretta di sottomoduli irriducibili. Segue $y = 0_V$, dunque $P = \underline{0}$ e L = M.
Infine, l'ultima parte dell'enunciato segue dalle considerazioni sull'unicità della decomposizione astratta di Jordan.

Il Corollario che segue assicura l'annunciata "compatibilità" della decomposizione astratta di Jordan con le usuali decomposizioni di Jordan in ogni rappresentazione di L.

Corollario . *Sia L un'algebra di Lie semisemplice, e sia $\phi : L \to gl(V)$ una qualsiasi rappresentazione (finito-dimensionale) di L. Per ogni $x \in L$, se $x = x_s + x_n$ è la decomposizione astratta di Jordan di x, allora $\phi(x) = \phi(x_s) + \phi(x_n)$ è l'ordinaria decomposizione di Jordan di $\phi(x)$.*

Dim. Poichè ad x_s è semisemplice, esiste una base $(x_1 , \ldots , x_n)$ di L formata da autovettori di ad x_s . Per i = 1, . . . , n si ha: $[\phi(x_s),\phi(x_i)] = \phi[x_s , x_i] = \phi(\lambda_i x_i) = \lambda_i \phi(x_i)$, cioè $\phi(x_i)$ è un autovettore di $ad_{\phi(L)} \phi(x_s)$. Pertanto $\phi(L)$ contiene una base costituita da autovettori di $ad_{\phi(L)} \phi(x_s)$, ovvero $ad_{\phi(L)} \phi(x_s)$ è semisemplice. Consideriamo ora $ad_{\phi(L)} \phi(x_n)$. ad x_n è nilpotente, i.e. per qualche r $(ad\ x_n)^r(x) = [x_n [x_n [\ldots . [x_n x]]]] = 0$ $\forall x \in L$. Poichè $\phi[x_n [x_n [\ldots . [x_n x]]]] = [\phi(x_n) [\phi(x_n) [\ldots . [\phi(x_n) \phi(x)]]]] = \phi(0) = 0$, si deduce che è anche $(ad_{\phi(L)} \phi(x_n))^r = 0$, ovvero che $ad_{\phi(L)} \phi(x_n)$ è nilpotente. Poiche' $[\phi(x_s),\phi(x_n)] = \phi([x_s,x_n] = 0$, si conclude che $\phi(x) = \phi(x_s) + \phi(x_n)$ è la decomposizione astratta di Jordan di $\phi(x)$ nell'algebra semisemplice $\phi(L)$, e quindi anche, in forza del Teorema precedente, l'usuale decomposizione di Jordan di $\phi(x)$.

Osservazione. Segue dal Teorema e dal Corollario precedenti che, se L è un'algebra di Lie lineare semisemplice, e $x \in L$ è semisemplice (nilpotente), $\phi(x)$ è semisemplice (nilpotente) in ogni rappresentazione $\phi : L \to gl(V)$.

8. Il Teorema di Levi

Siano L un'algebra di Lie su un campo F , I un ideale di L , e S una sottoalgebra di L . Se $L = I \oplus S$ (somma diretta di sottospazi) , diremo che L è *prodotto semidiretto* (o *estensione spezzata*) di S mediante l'ideale I . In tal caso , S è isomorfa come algebra di Lie all'algebra quoziente L/I (mediante la corrispondenza $s \to I + s$) . Inoltre , poichè per ogni $s \in S$ (ad s)$I \subseteq I$, così che $(ad\ s)_{|I} \in Der(I)$, l'applicazione $f : s \to (ad\ s)_{|I}$ realizza un omomorfismo di algebre di Lie da S a Der(I) . Si vede subito allora, che la struttura dell'algebra L è completamente determinata dalle strutture di I e di S, e dall'omomorfismo f. Infatti un qualsiasi bracket in L è determinato da brackets del tipo [i j] per $i , j \in I$, [s t] per $s , t \in S$, e $[s\ x] = (ad\ s)(x) = f(s)(x)$ per $s \in S$, $x \in I$. Inversamente si vede facilmente che , date comunque due algebre di Lie I e S su F , e un omomorfismo $f : S \to Der(I)$, si può costruire a partire dalla somma diretta degli spazi I e S , e imponendo $[s\ x] = f(s)(x)$ per $s \in S$, $x \in I$, un'algebra di Lie L , prodotto semidiretto di S mediante I .

Sia ora I = Rad L , così che l'algebra quoziente L/Rad L è semisemplice . Osserviamo che , se L contiene una sottoalgebra semisemplice S tale che L = Rad L + S (somma di sottospazi) , allora $L = Rad\ L \oplus S$ (poichè $Rad\ L \cap S$, essendo un ideale risolubile di S , è necessariamente nullo) , e dunque L è prodotto semidiretto di S mediante Rad L , così che S è isomorfa a L/Rad L . Inversamente , se supponiamo che L contenga una sottoalgebra S isomorfa a L/Rad L , allora S è semisemplice , quindi $Rad\ L \cap S = \underline{0}$, e per ragioni dimensionali $L = Rad\ L \oplus S$.

In questo paragrafo proviamo , assumendo al solito (salvo che nel Lemma preliminare) che L sia definita su un campo F algebricamente chiuso di caratteristica zero , il classico “teorema di spezzamento” di Levi , e cioè che

effettivamente L contiene una sottoalgebra semisemplice S isomorfa a L/Rad L (ovvero tale che $L = \mathrm{Rad}\, L \oplus S$) .

Lemma . *Sia L un' algebra di Lie , K un ideale di L , U un L-modulo , e supponiamo che esista $u \in U$, tale che :*
i) $Lu = Ku$;
ii) $k \rightarrow ku$ *sia un isomorfismo fra gli spazi K e Ku .*
Allora $I_u = \{ x \in L \mid xu = 0 \}$ *è una sottoalgebra di L , e* $L = K \oplus I_u$ *(prodotto semidiretto)*

Dim. Si vede subito che I_u è una sottoalgebra di L . L'applicazione $x \rightarrow xu$ è un epimorfismo dello spazio vettoriale L sullo spazio $Lu = Ku \cong K$, avente nucleo I_u . Poiché $I_u \cap K = \underline{0}$ in forza di ii) , da $\dim L = \dim K + \dim I_u$ segue l'asserto .

Teorema 1 . *Sia* $\phi : L \rightarrow S$ *un epimorfismo da un'algebra di Lie L a un'algebra semisemplice S . Allora L contiene una sottoalgebra M (isomorfa a S) tale che* $L = \mathrm{Ker}\phi \oplus M$.

Dim. : Poniamo $K = \mathrm{Ker}\, \phi$, e identifichiamo S con L/K . Proviamo l'asserto per induzione sulla dimensione di K , osservando che se $K = \underline{0}$, l'asserto è banalmente vero .

1) Prima riduzione : K è un sottomodulo irriducibile del modulo aggiunto di L .

Supponiamo $\underline{0} \subset I \subset K$, I ideale di L . L'epimorfismo canonico da L/I a (L/I)/(K/I) = S , dà luogo per l'ipotesi induttiva a una sottoalgebra L_1 di L , tale che L_1/I è una sottoalgebra di L/I isomorfa a S e supplementare di K/I. Similmente, l'epimorfismo canonico da L_1 a L_1/I dà luogo per l'ipotesi induttiva a una sottoalgebra L_2 di L_1 isomorfa a S e supplementare di I . Ne segue che L_2 è supplementare di K in L , e l'asserto del teorema è provato .

2) Seconda riduzione : K è abeliano .

Osserviamo che , essendo S semisemplice , Rad L è contenuto in K . Se $\mathrm{Rad}\, L = \underline{0}$, L è semisemplice, e quindi (cfr. 4. , Teorema 1) , $L = K \oplus K^{\perp}$. Dunque l'asserto è provato con $M = K^{\perp}$. Poichè K , in forza di 1) , è irriducibile , possiamo perciò supporre Rad L = K . Ma Rad L è risolubile , e quindi $[KK] \subset K$. Ed essendo [KK] un ideale di L , ancora l'irriducibilità di K come L-modulo implica $[KK] = \underline{0}$, ovvero K abeliano .

3) Terza riduzione : K è un L-modulo non-banale .

Supponiamo che L operi banalmente su K , cioè che , $\forall\, x \in L$, $\forall\, k \in K$, sia $[xk] = 0$.
Allora S = L/K opera su L mediante l'azione $(K + x)y = [xy]$, ed essendo S semisemplice , per il Teorema di Weyl L è un S-modulo completamente riducibile . Dunque K ha un complemento in L , che è un ideale di L soddisfacente l'asserto .

In forza delle precedenti riduzioni , possiamo dunque supporre che K sia abeliano , e che sia un L -modulo (e quindi anche un S-modulo) irriducibile non-banale (essendo ben definita l'azione $(K + x)k = [xk]$,$\forall\, x \in L$, $\forall\, k \in K$) .

Il Teorema sarà provato se , nelle ipotesi a cui ci siamo ridotti , proveremo l'esistenza di un elemento u soddisfacente le condizioni del Lemma .
A tale scopo , poniamo U = gl(L) , e consideriamo la rappresentazione $\sigma : L \rightarrow gl(U)$ definita ponendo , per ogni $x \in L$ e per ogni $f \in gl(L)$, $\sigma(x)f = [\mathrm{ad}\, x , f]$ (si verifichi che σ è effettivamente una rappresentazione!) . L'azione $xf = \sigma(x)f$ dà a U la struttura di L-modulo , e possiamo considerare la catena ascendente di L-sottomoduli di U : $P \subseteq Q \subseteq R$, ove $P = \{ \mathrm{ad}\, k \mid k \in K \}$, $Q = \{ f \in gl(L) \mid f(L) \subseteq K , f(K) = \underline{0} \}$, $R = \{ f \in gl(L) \mid f(L) \subseteq K , f_{|K} \text{ scalare} \}$ (si verifichi che sono sottomoduli!) . Sia ι la mappa d'inclusione di Q in R , e sia $\lambda : R \rightarrow F$ l'applicazione che ad ogni $r \in R$ associa lo scalare λ_r tale che $r_{|K} = \lambda_r I_K$. Se consideriamo il campo F come L-modulo banale , essendo , per ogni $x \in L$, $r \in R$, $k \in K$, $xr(k) = [\mathrm{ad}\, x , r](k) = [x , r(k)] - r([xk] = \lambda_r[xk] - \lambda_r[xk] = 0$, si ha $\lambda_{xr} = 0 = x\lambda_r$, ovvero λ è un omomorfismo di L-moduli . Poichè $\mathrm{Ker}\, \lambda = Q$ e $\mathrm{Im}\, \lambda = F$, la sequenza di L-moduli

$$0 \to Q \xrightarrow{\iota} R \xrightarrow{\lambda} F \to 0$$

è esatta .
Ne segue che , definendo $\underline{\lambda}(P + r) = \lambda(r)\ \forall\ r \in R$, si ha la sequenza esatta di L-moduli

$$(*) \quad 0 \to Q/P \xrightarrow{\iota} R/P \xrightarrow{\underline{\lambda}} F \to 0 .$$

D'altra parte , per ogni $x \in K$, $r \in R$ si ha $xr = [\mathrm{ad}\, x , r] = (\mathrm{ad}\, x)r - r(\mathrm{ad}\, x) = -r(\mathrm{ad}\, x) = -\lambda_r(\mathrm{ad}\, x)$ (si noti che $(\mathrm{ad}\, x)r = 0$ perchè $r(L) \subseteq K$ e K è abeliano!) . Dunque $xR \subseteq P\ \forall\ x \in K$, e pertanto (*) può essere vista come una sequenza di S = L/K-moduli (con l'azione $(K+x)(P+r) = P + xr$).
Ora , poichè S è semisemplice , vale il "principio del sollevamento degli invarianti" provato nella prima parte della dimostrazione del Teorema di Weyl , cioè (*) si spezza . In altre parole , esiste $\underline{u} \in R/P$, tale che $R/P = Q/P \oplus < \underline{u} >$, e $< \underline{u} >$ è S-invariante . Possiamo inoltre normalizzare $\underline{u}$, e supporre che sia $\underline{\lambda}_{\underline{u}} = 1$.
Siamo ora in grado di provare che una qualsiasi preimmagine u di $\underline{u}$ in R soddisfa le condizioni del Lemma :
i) Sia $x \in L$. Si deve provare che esiste $k \in K$ tale che $xu = ku$. Poichè per ogni $k \in K$ è $ku = -\lambda_u(\mathrm{ad}\, k) = -\mathrm{ad}\, k \in P$, si tratta in effetti di provare che $xu \in P$. Ma l'azione di S su $< \underline{u} >$ è necessariamente quella banale , cioè , essendo $\underline{u} = P + u$, $x(P + u) = P + xu = P$, e questo è ciò che si vuole .
ii) Sia $k \in K$ tale che $ku = -\mathrm{ad}\, k = 0$. Allora $[xk] = 0\ \forall\ x \in L$, ovvero $< k >$ è un sottomodulo dell' L-modulo K . E poichè K è irriducibile e non-banale , si conclude che $k = 0$.

Corollario. *Una qualsiasi algebra di Lie L su F è prodotto semidiretto di una sua sottoalgebra semisemplice mediante il radicale Rad L .*

Dim. Si applichi il Teorema precedente , scegliendo l'epimorfismo canonico $\phi : L \to L/\mathrm{Rad}\, L$.

Osservazione. Una qualsiasi sottoalgebra semisemplice di L soddisfacente le condizioni del Corollario , viene chiamata **fattore di Levi** di L . In generale , L ammette più di un fattore di Levi . Tuttavia , sussiste una essenziale unicità dei fattori di Levi , nel senso che essi sono tutti fra loro 'coniugati' , secondo quanto afferma il seguente risultato (per la cui dimostrazione rimandiamo ad es. a N. Jacobson , "Lie Algebras" , p. 92) :

Teorema 2 (Mal'cev) .

Se S_1 , S_2 sono due sottoalgebre di L , tali che sia $L = \mathrm{Rad}\, L \oplus S_1 = \mathrm{Rad}\, L \oplus S_2$, allora esiste un automorfismo f di L tale che $f(S_1) = S_2$ (e si può scegliere $f = \exp(\mathrm{ad}\, z)$, ove z è un elemento ad-nilpotente di Rad L) .

9. Le rappresentazioni di sl(2,F)

In questo paragrafo, L denota l'algebra speciale lineare sl(2,F), ove F è un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero. $\underline{b}$ = (x, y, h) è la base standard di L (cf. I.2.), ovvero: $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Si ha allora: $[h,x] = 2x$, $[h,y] = -2y$, $[x,y] = h$. Ricordiamo infine che L è un'algebra semplice (I.3.).

1) Decomposizione di un L-modulo in spazi-peso

Sia V un qualsiasi L-modulo. Poichè h è semisemplice, h è tale anche nella sua azione su V. In altre parole, lo spazio V è somma diretta degli autospazi dell'endomorfismo di V che rappresenta h. Ponendo dunque, per ogni $\lambda \in F$, $V_\lambda = \{v \in V \mid hv = \lambda v\}$ (eventualmente $= \underline{0}$!), possiamo scrivere : $V = \dot{\sum} V_\lambda$.

Definizione 1. *Se* $V_\lambda \neq \underline{0}$ *, i.e.* λ *è un autovalore per h su V, diremo che* λ *è un* **peso** (weight) *di h su V, e che* V_λ *è uno* **spazio-peso** (weight space).

Lemma 1. *Per ogni* $v \in V_\lambda$, $xv \in V_{\lambda+2}$, *e* $yv \in V_{\lambda-2}$.

Dim. $h(xv) = [h,x]v + xhv = 2xv + \lambda(xv) = (\lambda+2)xv$. $h(yv) = [h,y]v + yhv = -2yv + \lambda(yv) = (\lambda-2)yv$.

Poichè V ha dimensione finita su F, e $V = \dot{\sum} V_\lambda$, esiste certamente $\lambda \in F$ tale che $V_\lambda \neq \underline{0}$, ma $V_{\lambda+2} = \underline{0}$.

Diamo la seguente :

Definizione 2. *Sia* λ *un peso di h su V, tale che* $V_{\lambda+2} = \underline{0}$. *Diremo che ogni vettore non-nullo di* V_λ *è un* **vettore massimale** *di peso* λ .

Notiamo che, se v è un vettore massimale di peso λ , per il Lemma 1 è $xv = 0$.

2) Struttura degli L-moduli irriducibili

Sia ora V un L-modulo irriducibile, e sia v_0 un vettore massimale di peso λ . Definiamo : $v_{-1} = 0$, $v_i = (1/i!)y^i v_0$ per ogni $i \geq 0$. Descriviamo l'azione di L sui vettori v_i $(i \geq 0)$:

Lemma 2.

i) $hv_i = (\lambda - 2i)v_i$

ii) $yv_i = (i+1)v_{i+1}$

iii) $xv_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$

Dim. i) Poichè $v_0 \in V_\lambda$, per il Lemma 1 $yv_0 \in V_{\lambda-2}$. E applicando il Lemma 1 iteratamente, $y^i v_0 \in V_{\lambda-2i}$ per ogni $i \geq 0$. Segue $hv_i = h((1/i!)y^i v_0) = (1/i!)(\lambda-2i)y^i v_0 = (\lambda-2i)v_i$.
ii) Immediato, dalla definizione di v_i .
iii) Per induzione su i. Se $i = 0$, $xv_0 = 0$, e l'asserto è vero poichè si è posto $v_{-1} = 0$. Per $i > 0$, calcoliamo : $ixv_i = x(iv_i) = x(yv_{i-1})$ (per ii)) $= [x,y]v_{i-1} + yxv_{i-1} = hv_{i-1} + yxv_{i-1} = (\lambda-2(i-1))v_{i-1} + y(\lambda-i+2)v_{i-2}$ (per i) e per l'ipotesi induttiva) $= (\lambda-2i+2)v_{i-1} + (\lambda-i+2)(i-1)v_{i-1}$ (per ii)) $= i(\lambda-i+1)v_{i-1}$. Segue iii).

Le formule i), ii), iii) ottenute nel lemma precedente contengono informazioni cruciali:

1) *I vettori* $v_i \neq 0$ *sono linearmente indipendenti,* poichè in forza di i) sono autovettori relativi ad autovalori distinti di h. Ne segue che, essendo V di dimensione finita su F, *esiste un intero non-negativo m con la proprietà che m è il minimo intero tale che* $v_m \neq 0$, *ma* $v_{m+1} = 0$. Evidentemente, per la stessa definizione dei v_i , è allora $v_{m+r} = 0$ per ogni $r > 0$.

2) $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ *è una base per V.*

Infatti, in forza di i), ii), e iii), il sottospazio $U = \langle v_0, v_1, \ldots, v_m \rangle$ è un L-sottomodulo di V. Poichè V è irriducibile e $U \neq \underline{0}$, si conclude che $U = V$.

3) $\lambda = m = \dim V - 1$ (!)

In forza di iii), $xv_{m+1} = (\lambda - m)v_m$. Poichè $v_{m+1} = 0$, e $v_m \neq 0$, si ottiene appunto $\lambda = m$.

Definizione 3. *Diremo che il peso* λ *(= dim V -1) di un vettore massimale* v_0 *di V è il* **peso più alto** (highest weight) *di V.*

4) *I pesi di V sono m, m-2, . . . , -(m-2), -m , e hanno tutti molteplicità 1. In particolare, l'unico vettore massimale di V, a meno di scalari, è* v_0 *.*

In effetti, in forza di i), la matrice dell'endomorfismo di V che rappresenta h, rispetto alla base (v_0 , v_1 , . . . , v_m), è la matrice diagonale diag(m, m-2, . . . , -(m-2), -m).

5) *La struttura di V come L-modulo è completamente determinata dalle formule i), ii), iii).* Infatti esse descrivono esplicitamente l'azione degli elementi della base standard (x, y, h) di L sugli elementi della base (v_0 , v_1 , . . . , v_m) di V. (In particolare, si noti che le matrici rispetto a tale base degli endomorfismi che rappresentano x e y sono, rispettivamente, strettamente triangolare alta e strettamente triangolare bassa (e dunque, come ci si doveva attendere, nilpotenti).)

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente :

Teorema 1. *Sia V un L-modulo irriducibile. Allora : a) V è somma diretta degli spazi-peso* V_μ *di h,* $\mu = m$*, m-2, . . . , -(m-2), -m, m = dim V - 1, e dim* $V_\mu = 1$ *per ogni* μ*. b) V ha (a meno di scalari) un unico vettore massimale* v_0 *, il cui peso è m. c) Posto, per* $i \geq 0$*,* $v_i = (1/i!)y^i v_0$ *, (*v_0 *,* v_1 *, . . . ,* v_m *) è una base di V, e l'azione di L su V è descritta dalle formule i), ii), iii) (con* $\lambda = m$*, e i = 0,1, . . . , m). In particolare, per ogni intero* $m \geq 0$*, a meno d'isomorfismi esiste al più un L-modulo irriducibile V = V(m) di dimensione m+1.*

La struttura di un arbitrario L-modulo è allora descritta dal seguente :

Corollario 1. *Sia V un qualsiasi L-modulo finito-dimensionale (*$V \neq \underline{0}$*). Allora V è somma diretta degli spazi-peso* V_μ *relativi a h. Ogni peso* μ *di h su V è un intero, e compare insieme al suo opposto, con la stessa molteplicità* $r = dim V_\mu = dim V_{-\mu}$ *. In particolare, in ogni decomposizione di V come somma diretta di sottomoduli irriducibili, il numero degli addendi è dato da dim* V_0 *+ dim* V_1*.*

Dim. Sia $V = \dot{\sum_i} U_i$ una decomposizione di V come somma diretta di sottomoduli irriducibili. La prima parte dell'asserto segue subito dalla descrizione che il Teorema precedente dà di ciascuno degli U_i . La seconda parte segue dal fatto che ciascun U_i ha il peso 0 o il peso 1 (secondo che il peso più alto di U_i è pari o dispari) con molteplicità 1 (ma non entrambi).

A questo punto, per completare la classificazione delle rappresentazioni irriducibili di sl(2,F), non ci resta che costruire esplicitamente un L-modulo irriducibile di ogni possibile dimensione m+1 ($m \geq 0$*).*

A tale scopo, consideriamo uno spazio vettoriale V(m) di dimensione m+1 su F, con base (v_0 , v_1 , . . . , v_m). Denotiamo con H, Y, X gli endomorfismi di V definiti sulla base scelta dalle formule i), ii), iii), rispettivamente. L'applicazione lineare $\phi : L \to gl(V(m))$ definita ponendo $\phi(x) = X$, $\phi(y) = Y$, $\phi(h) = H$ sarà una rappresentazione sse $\phi[h,x] = [\phi(h),\phi(x)]$, $\phi[h,y] = [\phi(h),\phi(y)]$, $\phi[x,y] = [\phi(x),\phi(y)]$, ovvero sse 2X = [H,X] , -2Y = [H,Y] , H = [X,Y] . E ciò si verifica senza difficoltà eseguendo i calcoli corrispondenti sulle matrici rappresentative di X, Y, H. (La matrice di X ha zeri ovunque, salvo sulla diagonale secondaria superiore ove ha, dall'alto verso il basso, m,
m-1, . . . , 2,1; la matrice di Y ha zeri ovunque, salvo sulla diagonale secondaria inferiore ove ha, dall'alto verso il basso, 1, 2, . . . , m-1, m: infine, la matrice di H è diag(m, m-2, . . . , -(m-2), -m).)
L'irriducibilità di V(m) segue poi immediatamente dal Corollario, in forza della formula i).
(Osserviamo esplicitamente che gli L-moduli V(0), V(1), V(2) sono rispettivamente (a meno d'isomorfismi) il modulo banale, il modulo naturale, e il modulo aggiunto.)

La simmetria della struttura del modulo V(m) viene ulteriormente messa in luce se consideriamo l'azione su $\phi(h)$ dell'automorfismo $\sigma(\phi) = \exp \phi(x) \exp \phi(-y) \exp \phi(x)$ (si noti che $\sigma(\phi)$ è un automorfismo di V(m) poichè $\phi(x)$ e $\phi(-y)$ sono nilpotenti!). Si è visto in I.5(Teorema,pto ii)) che coniugare $\phi(h)$ mediante $\sigma(\phi)$ equivale ad applicare a $\phi(h)$ $\exp(\mathrm{ad}\ \phi(x)) \exp(\mathrm{ad}\ \phi(-y)) \exp(\mathrm{ad}\ \phi(x))$. D'altra parte, poichè L è un'algebra semplice, se $m > 0$ $\phi(L)$ è isomorfa a L. Ed essendo in L (cf. Esempio in I.5) $\sigma = \exp x \exp(-y) \exp x = e_{12} - e_{21}$, donde $\sigma(h)\sigma^{-1} = -h$, si ricava che deve essere $\sigma(\phi)(\phi(h))\sigma(\phi)^{-1} = -\phi(h)$. Si vede subito da qui che $\sigma(\phi)$ manda V_{m-2i} in $V_{-(m-2i)}$ per ogni $i = 0, \ldots, m$.

10. Decomposizione di Cartan di un'algebra semisemplice

In questa sezione, al solito, L è un'algebra di Lie semisemplice , e per abuso di linguaggio si dirà che $x \in L$ è semisemplice (risp. nilpotente) quando x è ad-semisemplice (risp. ad-nilpotente) . Iniziamo con un semplice lemma :

Lemma 1. *Ogni algebra di Lie semisemplice L contiene elementi semisemplici non-nulli.*

Dim. L contiene certamente elementi non-nilpotenti, poichè in caso contrario, per il Teorema di Engel, L sarebbe nilpotente, il che non è. Sia dunque x un elemento non-nilpotente di L. La parte semisemplice di x nella decomposizione astratta di Jordan, è un elemento di L, semisemplice e diverso da zero.

Segue dal Lemma 1 che L contiene sottoalgebre $\neq \underline{0}$ formate da elementi semisemplici (e.g. $< x_s >$, con x_s semisemplice non-nullo).

Definizione 1. *Diremo che una sottoalgebra $T \neq \underline{0}$ di L è una* **sottoalgebra torica** *(o* **torale***), se T consiste di elementi semisemplici.*

Proposizione 1. *Ogni sottoalgebra torica di L è abeliana.*

Dim. Sia T una sottoalgebra torica di L. Si tratta di provare che, per ogni $x,y \in T$, $[xy] = \mathrm{ad}\ x(y) = 0$, cioè che $\mathrm{ad}\ x_{|T} = 0$. Poichè ad x è, per definizione, semisemplice, anche $\mathrm{ad}\ x_{|T}$ è semisemplice, cioè diagonalizzabile su T (cf. 1.Lemma 1). Ci basta dunque provare che $\mathrm{ad}\ x_{|T}$ non ha autovalori non-nulli. Sia infatti $0 \neq y \in T$ tale che $[xy] = cy$, con $c \neq 0 \in F$. Allora si ha : (*) $(\mathrm{ad}\ y_{|T})(x) = [yx] = -cy$, e, in particolare, $(\mathrm{ad}\ y_{|T})(x)$ è un autovettore per $\mathrm{ad}\ y_{|T}$, relativo all'autovalore 0. D'altra parte, ad y, e dunque anche $\mathrm{ad}\ y_{|T}$, è semisemplice, e quindi esiste in T una base di autovettori per $\mathrm{ad}\ y_{|T}$. Se ora si esprime x come combinazione lineare dei vettori di una tale base, e si applica $\mathrm{ad}\ y_{|T}$ a x, ciò che si ottiene è una combinazione lineare di autovettori per $\mathrm{ad}\ y_{|T}$ relativi ad autovalori non-nulli (o il vettore zero), ciò che contraddice (*).

Sia ad esempio $L = sl(n,F)$, o più in generale sia L una delle algebre lineari classiche (che, come vedremo, sono semplici). Allora la sottoalgebra D formata dalle matrici diagonali che stanno in L è evidentemente torica. Di più, D è una *sottoalgebra torica massimale* di L. Infatti, per la Proposizione precedente, una sottoalgebra torica di L che contenga D, deve banalmente normalizzarla. Ma (cf. Esercizio 2) in II.1.) D è autonormalizzante in L .

Gli oggetti che ci interessano, sono per l'appunto le *sottoalgebre toriche massimali* in un'algebra semisemplice L. Sia dunque H una tale sottoalgebra di L. Per la Proposizione precedente, H è abeliana. Ne segue che ad H è formata da endomorfismi semisemplici di L che commutano fra loro, e dunque (cf. 1.Prop.1) è simultaneamente diagonalizzabile. In altre parole, esiste in L una base di autovettori comuni a tutti gli elementi di ad H. E' immediato osservare che, se v appartiene a una tale base di L, per ogni $h \in H$ si ha $[hv] = \alpha(h)v$, ove $h \rightarrow \alpha(h)$ è una forma lineare da H al campo F, cioè un elemento dello spazio duale H*. Posto allora, per ogni $\alpha \in H^*$, $L_\alpha = \{x \in L \mid [hx] = \alpha(h)x, \forall h \in H\}$, si vede facilmente che *L è somma diretta dei sottospazi L_α* (e dunque, in particolare , vi è solo un numero finito di $\alpha \in H^*$ tali che $L_\alpha \neq \underline{0}$).

[Sia infatti ($v_1, \dots, v_m$) una base di L costituita da autovettori comuni a tutti gli elementi di ad H , ordinata in modo tale che, $\forall\, h \in H$, la matrice rappresentativa di ad h sia $\mathrm{diag}(\alpha_1(h), \dots, \alpha_1(h) \mid \alpha_2(h), \dots, \alpha_2(h) \mid \dots \mid \alpha_d(h), \dots, \alpha_d(h))$, ove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ sono elementi distinti di H^* che compaiono con molteplicità $r_1, r_2, \dots, r_d$. Allora, posto $L_1 = < v_1, \dots, v_{r1} >$, $L_2 = < v_{r1+1}, \dots, v_{r1+r2} >, \dots, L_d = < v_{n-rd+1}, \dots, v_n >$, si ha : $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_d$. D'altronde, per ogni $\alpha \in H^*$, o $L_\alpha = \underline{0}$, oppure, per ogni $0 \neq x \in L_\alpha$, posto $x = \Sigma\, x_i$ ($x_i \in L_i$) si ha $\forall\, h \in H$: $[hx] = \alpha(h)x = \Sigma\, \alpha(h)x_i$, e $[hx] = [h\, \Sigma\, x_i] = \Sigma\, [hx_i] = \Sigma\, \alpha_i(h)\, x_i$, donde $\alpha(h) = \alpha_i(h)$, ciò che implica $x = x_i \in L_i$ per un certo i, ovvero $L_\alpha = L_i = L_{\alpha i}$.]

Notiamo infine esplicitamente che per $\alpha = 0$ L_α non è altro che $C_L(H)$, il centralizzante di H in L , che contiene H essendo H abeliana.

Definizione 2. *L'insieme degli* $\alpha \in H^*$ *diversi da zero, e tali che* $L_\alpha \neq \underline{0}$ *, si denota con* Φ*. Si dice che gli elementi di* Φ *sono le* **radici** *di L (relative a H), e che i corrispondenti sottospazi* L_α *sono gli* **spazi radicali** (root spaces) *di L (relativi a H). La decomposizione in somma diretta di L :*

$$L = C_L(H) \dotplus \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

prende il nome di **decomposizione di Cartan** *(o* **decomposizione in spazi radicali***) di L.*

Esempio. Sia $L = sl(n,F)$, con base standard $\underline{b} = \{h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1},\ 1 \le i \le n\text{-}1\} \cup \{e_{ij},\ 1 \le i \neq j \le n\}$. Si ponga $H = D = < h_1, \dots, h_{n-1} >$, la sottoalgebra delle matrici diagonali di traccia zero. Come abbiamo già osservato, H è torica massimale e autocentralizzante in L. Inoltre, per ogni $h = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \in H$, $[h, e_{ij}] = he_{ij} - e_{ij}h = (a_i - a_j)e_{ij}$. Da ciò scende subito che le radici di L relative a H sono le forme lineari $\alpha \in H^*$ definite da $\alpha : h \rightarrow a_i - a_j$, e i corrispondenti spazi radicali L_α sono i sottospazi 1-dimensionali $< e_{ij} >$. In altre parole, alla base standard $\underline{b}$ corrisponde una decomposizione di Cartan di L .

A) Proprietà degli spazi radicali (Relazioni di ortogonalità)

Elementari ma importanti proprietà degli spazi radicali sono contenute nella seguente:

Proposizione 2.
i) Per ogni $\alpha, \beta \in H^*$ *è* $[L_\alpha L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$.
ii) Per ogni $x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$, *ad x è nilpotente.*
iii) Se $\alpha, \beta \in H^*$ *, e* $\alpha + \beta \neq 0$, L_α *è ortogonale a* L_β *(rispetto alla forma di Killing definita su L).*

Dim.

i) Per ogni $h \in H$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, essendo ad h una derivazione si ha : $\mathrm{ad}\, h[xy] = [h[xy]] = [[hx]y] + [x[hy]] = \alpha(h)[xy] + \beta(h)[xy] = (\alpha + \beta)(h)[xy]$.
Ciò prova l'asserto.
ii) Sia $\alpha \neq 0$, $x \in L_\alpha$, e sia $\beta \in H^*$ con $L_\beta \neq \underline{0}$. Allora, in forza di i), esiste $n(\beta)$ tale che $(\mathrm{ad}\, x)^{n(\beta)}(L_\beta) \subseteq L_{n(\beta)\alpha + \beta} = \underline{0}$. Posto $n = \max(n(\beta))$, si avrà $(\mathrm{ad}\, x)^n = 0$.
iii) Si scelga $h \in H$ tale che $(\alpha + \beta)(h) \neq 0$. Se κ è la forma di Killing di L, si ha allora, per ogni $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$: $\kappa([hx], y) = -\kappa([xh], y) = -\kappa(x, [hy])$, da cui $\alpha(h)\kappa(x, y) = -\beta(h)\, \kappa(x,y)$, ovvero $(\alpha + \beta)(h)\kappa(x, y) = 0$. Segue $\kappa(x, y) = 0$, che è la tesi.

Corollario. *La restrizione della forma di Killing* κ *di L a* $L_0 = C_L(H)$ *è non-degenere.*

Dim. Poichè L è semisemplice, κ è non-degenere. Per la Proposizione 2 L_0 è ortogonale a ogni spazio radicale L_α ($\alpha \in \Phi$). Poichè $L = L_0 \dotplus \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$, se $u \in L_0$ è ortogonale a L_0 , segue allora che u è ortogonale a L, e ciò implica $u = 0$. Donde la tesi.

B) $L_0 = H$

Vogliamo ora provare che L_0 coincide con H :

Teorema 1. *Sia H una sottoalgebra torica massimale di L. Allora $H = C_L(H)$.*

Dim. Si ponga $C = C_L(H)$.

1) C contiene sia la parte semisemplice che la parte nilpotente di ogni suo elemento:
Per ogni $x \in C$, ad $x(H) = \underline{0}$. Ne segue (cfr. 1. Teorema 1, iii)) che è anche $(\mathrm{ad}\ x)_s(H) = \underline{0}$ e $(\mathrm{ad}\ x)_n(H) = \underline{0}$. Ma $(\mathrm{ad}\ x)_s = \mathrm{ad}\ x_s$ e $(\mathrm{ad}\ x)_n = \mathrm{ad}\ x_n$, ove $x = x_s + x_n$ è la decomposizione astratta di Jordan di x in L .

2) Tutti gli elementi semisemplici di C appartengono a H:
Sia $x \in C$ semisemplice. Allora $K = < H , x >$ è una sottoalgebra abeliana di L. Inoltre, essendo la somma di due elementi semisemplici che commutano fra loro un elemento semisemplice, K è torica. Per la massimalità di H si conclude che K = H, ovvero $x \in H$.

3) La restrizione di κ a H è non-degenere:
Si tratta di provare che, se $h \in H$ è tale che $\kappa(h,H) = 0$, allora $h = 0$. Poichè, per il Corollario precedente, la restrizione di κ a C è non-degenere, ci basta provare che, se $\kappa(h,H) = 0$, allora è anche $\kappa(h,C) = 0$. E a tale scopo, in forza di 1) e 2), ci basta provare che se x è un qualsiasi elemento nilpotente di C, $\kappa(h,x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ h \cdot \mathrm{ad}\ x) = 0$. Poichè ad x è nilpotente, e commuta con ad h, ad h · ad x è un endomorfismo nilpotente di L, e dunque ha traccia nulla, come volevasi.

4) C è un'algebra nilpotente:
Se $x \in C$ è semisemplice, allora per 2) $x \in H$. Pertanto $[xc] = 0$ per ogni $c \in C$, ovvero $\mathrm{ad}_C\ x = 0$, e dunque $\mathrm{ad}_C\ x$ è (banalmente) nilpotente. Se $x \in C$ è nilpotente, allora a fortiori $\mathrm{ad}_C\ x$ (= ad $x\,|_C$) è nilpotente. Se x è un arbitrario elemento di C, e $x = x_s + x_n$ è la sua decomposizione di Jordan in L , allora in forza di 1) x_s e x_n appartengono a C. Dunque $\mathrm{ad}_C\ x = \mathrm{ad}_C\ x_s + \mathrm{ad}_C\ x_n$ è somma di due endomorfismi nilpotenti di C che commutano fra loro, e quindi è nilpotente. Per il Teorema di Engel, si conclude che C è nilpotente.

5) C è abeliana:
Osserviamo innanzitutto che $H \cap [CC] = \underline{0}$. E' infatti $\kappa(H,[CC]) = \kappa([HC],C) = 0$, essendo κ associativa e $[HC] = \underline{0}$. Donde, essendo per 3) la restrizione di κ a H non-degenere, si ricava appunto $H \cap [CC] = \underline{0}$.
Supponiamo ora che C non sia abeliana, ovvero che sia $[CC] \neq \underline{0}$. Poichè [CC] è un ideale di C, $[CC] \cap Z(C) \neq \underline{0}$ (II.1.Corollario 3). Sia $0 \neq z \in [CC] \cap Z(C)$. Allora z non è semisemplice, perchè in tal caso in forza di 2) starebbe in H, e $H \cap [CC] = \underline{0}$. Pertanto la parte nilpotente z_n di z è non-nulla, e in forza di 1) sta in C. D'altra parte (cfr. 1.Teorema 1, ii)) sappiamo che ad z_n commuta con ogni endomorfismo che commuta con ad z, e dunque con ogni elemento di ad C. Se ne deduce che, per ogni $x \in C$, ad z_n · ad x è nilpotente, e in particolare $\kappa(z_n,x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ z_n \cdot \mathrm{ad}\ x) = 0$. Dunque $z_n \in C$ è ortogonale a ogni elemento di C, contro il fatto che la restrizione di κ a C è non-degenere.

6) Siamo ora in grado di concludere che C = H. Infatti, in caso contrario, C dovrebbe contenere, in forza di 1) e 2), un elemento nilpotente $x \neq 0$. Poichè C è abeliana, $\forall\ c \in C$ è $[x\ c] = 0$, e quindi $[\mathrm{ad}\ x, \mathrm{ad}\ c] = 0$. Ragionando come sopra si ottiene $\kappa(x,c) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ x \cdot \mathrm{ad}\ c) = 0$, per ogni $c \in C$. Dunque x sarebbe ortogonale a C, ancora contro il fatto che la restrizione di κ a C è non-degenere.

C) Identificazione di Φ con un sottoinsieme di H

Conseguenza immediata del corollario 1 e del teorema precedente è che la restrizione di κ a H è non-degenere. E' allora possibile, mediante la forma non-degenere $\kappa\,|_{H\times H}$, identificare H con lo spazio duale H* secondo un procedimento ben noto in algebra lineare. Precisamente, se ad ogni $a \in H$ si associa la forma lineare a* definita da $a^*(h) = \kappa(a,h)$ per ogni $h \in H$, l'applicazione $a \rightarrow a^*$ realizza un isomorfismo fra gli spazi H e H*. Dunque, ogni elemento $\phi \in H^*$ può essere identificato con l'unico elemento $t_\phi \in H$ tale che $\phi = t_\phi{}^*$. In particolare l'insieme delle radici Φ può essere identificato con il sottoinsieme $\{t_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ di H.